Title	対称性とコヒーレント近似(「非平衡系の統計物理」研究会(その1),研究会報告)
Author(s)	鈴木, 増雄
Citation	物性研究 (1992), 59(1): 21-29
Issue Date	1992-10-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/94974
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

対称性とコヒーレント近似

東京大学理学部　鈴木増雄

物理学においては、対称性という概念はもっとも基本的である[1)]。幾何学的具象的対称性から、ゲージ対称性のような抽象的なものまでいろいろあるが、ここでは、相転移における自発的対称性の破れの理論的な取り扱い方[2−64)]と、ユニタリ性やシンプレックティックな性質を保存する時間発展演算子の系統的な（コヒーレント）近似の作り方[65−87)]を解説する。

1　コヒーレント異常法[2−64)]

相転移では、ハミルトニアンは対称的であるが、状態は低温になると自発的に対称性が破れる。くり込み群や有限サイズ・スケーリング理論では、それぞれ、もとの無限系または有限系の対称的なハミルトニアンのまま取り扱う。ところで 1986 年に筆者の提唱したコヒーレント異常法では、平均場または有効場をかけて初めから対称性を破る取り扱いをする。クラスター平均場近似でそのクラスターサイズを順次（コヒーレントに）大きくして行き、その平均場近似で求めた応答関数の古典的発散の極 (T_c) と平均場臨界係数$\bar{Q}(T_c)$（留数）とを求める。このとき、留数$\bar{Q}(T_c)$ は極 T_cの関数として近似的な相転移点 T_cが真の相転移点 T_c^*に近づくにつれてコヒーレント異常を示す。すなわち、

$$\bar{Q}(T_c) \sim \frac{1}{(T_c - T_c^*)^{\psi}} \tag{1.1}$$

のような発散（異常性）を示す。ただし、(1.1) 式のコヒーレント異常指数ψは、系統的な近似列をいくつか作り、T_cと$\bar{Q}$のデータ（ＣＡＭ data と呼ばれる）を作り、$\log \bar{Q}$と$\log(T_c - T_c^*)$の図の傾きから、ψが求められる。このψが精度よく評価されると、もとの応答関数 $Q(T)$ はT_c^*の近傍で

$$Q(T) \sim \frac{1}{(T - T_c^*)^{\varphi}} \tag{1.2}$$

ただし

$$\varphi = 1 + \psi \tag{1.3}$$

のような異常性を示すことがわかっている[4,5)]。多数の例で具体的に実証されつつある[6−64)]。

非常に簡単な上の説明からもわかるように、1907 年のワイスの平均場近似と 1935 年のベーテの有効場近似を全く一般的にクラスター平均場近似として拡張して、それから相転移の本質が臨界指数まで含めて研究できるという点がコヒーレント異常法（ＣＡＭ）の真髄である。

クラスターを順次大きくしながら、大きなゆらぎをとり入れていくという点では、CAM理論はくり込み群の理論に類似しているが、以上に説明した通り、両者は、対称性に対する視点が全く異なり、後者では、対称的なハミルトニアンの固定点として相転移を求めるのに対して、CAM理論では、対称性を破る場に対する応答が発散するという条件のコヒーレントな変化から真の相転移点を評価する。

くり込み群の理論の出現以来、平均場理論は肩身が狭かったが、CAM理論によって、それは再び復権したと言えるであろう。実際の計算では、平均場をかけたまま、すなわち、対称性を破るハミルトニアンで実行するのではなく、予め、久保の線形応答理論[88]を用いて、例えば、磁化率$\chi_0(\omega)$に対する平均場近似の表式

$$\chi_0(\omega) = \frac{\chi_\Omega(\omega)}{1 - \mathcal{F}(\omega)} \tag{1.4}$$

を求めておく。ここで、$\chi_\Omega(\omega)$はクラスターΩに対する外場の無い対称的なハミルトニアンに対する磁化率であり、$\mathcal{F}(\omega)$はクラスターの中心の秩序パラメータと境界のそれとの動的なフィードバック関数である[4]。熱平衡状態での相転移点T_cは$1 - \mathcal{F}(0) = 0$から求められる。

このように、ゆらぎの統計力学という流れでみると、CAM理論は、久保のゆらぎの理論とフィッシャーの有限サイズ・スケーリング理論とを組み合わせて相転移・臨界現象、もっと広く協力現象を統一的に扱う一般論であると言えよう。

今後、「複雑系の科学」特に、非平衡系の（ダイナミカルな）現象を扱うのに大いに役立つものと期待される。

2　時間発展演算子・指数演算子の分解の一般論

非平衡系の問題では、一般に時間発展演算子$\exp(\frac{it}{\hbar}\mathcal{H})$を扱うことになるが、一般のハミルトニアン$\mathcal{H}$に対しては、この指数演算子を厳密に計算することは困難である。今までは、モーメント展開（すなわちtでの展開）や摂動展開（$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \lambda\mathcal{H}_1$）とおいて、相互作用の強さ$\lambda$に関する展開、すなわちファインマン展開）等がよく用いられてきたが、これらの展開は、もとの対称性、例えば、ユニタリー性やシンプレックティックな性質（リューヴィュ定理）を保存しないという大きな欠点を持っている。

この欠点を補う新しい展開が、ここで説明する「指数摂動展開」[72–75]、すなわち、指数演算子の積の展開である。さて、今

$$e^{it(A+B)} = f_A(t) f_B(t) + O(t^2) \tag{2.1}$$

という積の形に分解することを考えてみる。A，　Bをエルミート演算子とすると、左辺はユニタリーであるから、我々の対称性の要請から、右辺の積もユニタリーになるという条件を

課することにする。したがって

$$(f_A(t)f_B(t))^\dagger = (f_A(t)f_B(t))^{-1} \tag{2.2}$$

$$f_B(t)^\dagger f_A(t)^\dagger = f_B(t)^{-1}f_A(t)^{-1} \tag{2.3}$$

したがって

$$f_A(t)^\dagger = cf_A(t)^{-1}, \quad f_B(t)^\dagger = cf_B(t)^{-1} \tag{2.4}$$

でなければならない。よって、$c^2 = 1$, すなわち、$c = \pm 1$ である。 さらに、$A \equiv 0$ のときを考えれば、$c = 1$ であることがわかる。よって、$f_A(t)$ も $f_B(t)$ ユニタリーでなければならない。逆に、$f_A(t), f_B(t)$ 共にユニタリーならば、その積はユニタリーである。シンプレックティック (symplectic) な性質に関しても全く同様である。そこで

$$f_A(t) = e^{ig_A(t)} \tag{2.5}$$

とおくことが出来る。さらに、$g_A(t)$ を時間 t で展開して

$$g_A(t) = tg_1(A) + t^2 g_2(A) + \cdots \tag{2.6}$$

とおくと (2.1) より

$$g_1(A) + g_1(B) = A + B \tag{2.7}$$

となり、

$$g_1(A) = A, g_1(B) = B \tag{2.8}$$

であることがわかる。t の高次を零とおいて

$$f_A(t) = e^{itA}, f_B(t) = e^{itB} \tag{2.9}$$

とすると、よく知られたトロッター分解

$$e^{it(A+B)} = e^{itA}e^{itB} + O(t^2) \tag{2.10}$$

が得られる。実際は t が小さいとは限らないから

$$e^{it(A+B)} = (e^{\frac{it}{n}(A+B)})^n = (e^{\frac{it}{n}A}e^{\frac{it}{n}B})^n + O(\frac{t^2}{n}) \tag{2.11}$$

とするのが、通常の Trotter 公式である。さて、ここではもっと高次の分解を考える。2 次まで正しい分解は容易に

$$e^{it(A+B)} = e^{\frac{1}{2}itA}e^{itB}e^{\frac{1}{2}itA} + O(t^3) \tag{2.12}$$

であることがわかる。これは、よく知られている公式である[69,70]。

3次の分解は、最近 Ruth[77]によって発見され、それは、次のように与えられている：

$$F_3^{(R)}(it) = e^{\frac{7}{24}itA}e^{\frac{2}{3}itB}e^{\frac{3}{4}itA}e^{-\frac{2}{3}itB}e^{-\frac{1}{24}itA}e^{itB}. \tag{2.13}$$

今後、簡単のために、$x = it$ とおき、

$$e^{x(A+B)} = F_m(x) + O(x^{m+1}) \tag{2.14}$$

によって、m 次近似式 $F_m(x)$ を定義する。

4次の近似式としては、いろいろな人[72,78,81,82,84]によって次の形の公式が独立に発見されている：

$$F_4(x) = e^{\frac{s}{2}xA}e^{sxB}e^{\frac{1-s}{2}xA}e^{(1-2s)xB}e^{\frac{1-s}{2}xA}e^{sxB}e^{\frac{s}{2}xA}. \tag{2.15}$$

ただし、パラメータ s は

$$s = (2 - 2^{1/3})^{-1} = 1.3512\cdots \tag{2.16}$$

によって与えられる。これは、初等的に (2.15) の両辺を、A, Bの非可換性に注意しながら、x の 4 次まで展開して確かめることが出来るがたいへん面倒である。

ここでは、著者[72-75]によって初めて発見された漸化方式による求め方を紹介する。この方法では、$e^{x(A+B)}$に限らず、任意の数 qに対する $\exp[x(A_1 + A_2 + \cdots + A_q)]$ に関して

$$e^{x(A_1+A_2+\cdots A_q)} = F_m(x) + O(x^{m+1}) \tag{2.17}$$

という m 次近似式が全く一般的に求められるので便利である。

今、$(m-1)$ 次近似式 $Q_{m-1}(x)$ が求まったとすると、m 次近似式 $Q_m(x)$ は、$Q_{m-1}(x)$ の r個の積の形で

$$Q_m(x) = Q_{m-1}(p_1x)Q_{m-1}(p_2x)\cdots Q_{m-1}(p_rx) \tag{2.18}$$

と与えることができる[72-75]。ただし、パラメータ $\{p_j\}$ は、次の２つの条件を充たすものなら何でもよい：

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_r = 1 \tag{2.19}$$

$$p_1^m + p_2^m + \cdots + p_r^m = 0. \tag{2.20}$$

したがって、rを大きくすると、解は無数に多くなる。また、m が偶数のときは、明らかに (2.20) の解は複素数になってしまうので都合が悪い。よって、上の漸化方式は、$2m$ 次近似式がわかっているときに $2m+1$ 次近似式を求めるのに便利である。幸いなことにパラメータ $\{p_j\}$ を

$$p_{r-j+1} = p_j(\text{すなわち、}p_r = p_1, p_{r-1} = p_2, \cdots) \tag{2.21}$$

のように対称的にとると、$(2m-1)$ 次まで正しい近似式は、自動的に $2m$ 次まで正しくなっている[70,72-75]。よって、次の漸化公式が成立する：

$$F_{2m}(x) = F_{2m-2}(p_{m1}x)F_{2m-2}(p_{m2}x)\cdots F_{2m-2}(p_{mr}x). \tag{2.22}$$

ただし $\{p_{mj}\}$ は, 和が１で,

$$\sum_{j=1}^{r} p_{mj}^{2m-1} = 0 \quad ; \quad p_{m(r-j+1)} = p_{mj} \tag{2.23}$$

である。

特に, $r=5$, $p_{m1} = p_{m2} \equiv p_m$, $p_{m4} = p_{m5} = p_m$, $p_{m3} = 1 - 4p_m$ とおくと, 実際に役に立つ公式が得られる[72-75]。すなわち、

$$S_{2m}^{*}(x) = [S_{2m-2}^{*}]^2 S_{2m-2}^{*}((1-4p_m)x)[S_{2m-2}^{*}(p_m x)]^2, \tag{2.24}$$

ただし p_mは

$$p_m = (4 - 4^{1/(2m-1)})^{-1} \tag{2.25}$$

によって与えられる。この分解では、

$$|\, p_m \,| < 1, \quad |\, 1 - 4p_m \,| < 1 \tag{2.26}$$

となるため、$S_{2m}^{*}(x)$ は安定な収束のよい分解であることがわかる。これは実際に応用するときに便利な分解である[85]。

また、$m \to \infty$ では、上の分解 $S_{2m}^{*}(x)$ は、フラクタルな特徴を持っておりそのフラクタル次元 Dは、

$$D = \frac{\log 5}{\log 3} = 1.46 \cdots \tag{2.27}$$

で与えられる[72,73]。

もっと一般に、任意の高次分解公式が時間順序演算 P と久保[89]の対称化演算 S を用いて容易に求められる[74,75]。すなわち、適当に、例えば、s_j次まで正しい近似式 $G_j(x)$ を用いて m 次近似式を

$$F_m(x) = G_1(p_1 x) G_2(p_2 x) \cdots G_r(p_r x) \tag{2.28}$$

という積の形で求めることができる。ここで、パラメータ $\{p_j\}$ の充たすべき方程式は、次のようにして求められる. まず、$\mathcal{H} = A_1 + A_2 + \cdots + A_q$として、$G_j(x)$ を次のように表しておく：

$$G_j(x) = \exp(x\mathcal{H} + x^2 R_{j2} + x^3 R_{j3} + \cdots). \tag{2.29}$$

ここで、$\{R_{jm}\}$ は補正項であり、$G_j(x)$ が $e^{x\mathcal{H}}$ を s_j次まで正しく表していることにより、

$$R_{j2} = R_{j3} = \cdots = R_{js_j} = 0, R_{j(s_j+1)} \neq 0, \tag{2.30}$$

である。さて、上に述べた２つの演算 P と S の性質をうまく利用すると、m 次近似式 $F_m(x)$ は

$$F_m(x) = e^{x\mathcal{H}} + \sum_{n_1, n_2, \cdots}^{\prime} \frac{x^{n_1+2n_2+3n_3+\cdots}}{n_1! n_2! n_3! \cdots} \mathrm{PS}(Y_1^{n_1} Y_2^{n_2} \cdots) \tag{2.31}$$

と表される[74-76,86,87]。ただし、$\sum'$は $n_2 = n_3 = \cdots = 0$ の場合を除いた $n_1, n_2, n_3, \cdots$に関する和を表し、$\{Y_j\}$ は

$$Y_1 \equiv \sum_{j=1}^{r}(p_j \mathcal{H}), \quad Y_n \equiv \sum_{j=1}^{r}(p_j^n R_{jn}) \tag{2.32}$$

である。さて、$F_m(x)$ が m 次まで正しく指数演算子 $\exp(x\mathcal{H})$ を表すための必要充分条件は、(2.31) の基礎的な表式からわかるように、$n_1 + 2n_2 + \cdots \leq m$ となるすべての $n_1, n_2, \cdots$ に対して

$$\mathrm{PS}(Y_1^{n_1} Y_2^{n_2} Y_3^{n_3} \cdots) = 0 \tag{2.33}$$

となることである。(ただし、$n_2 = n_3 = \cdots = 0$ の場合は除く。)

上の条件 (2.33) を顕わに $\{p_j\}$ に関する方程式に変換するのは、PS の性質をうまく利用すれば簡単である。実際、$m = 12$ までは具体的な方程式が与えられている[74]。最近 $m = 10$ までは実際の解が求められている[90]。それによると、$m = 10$ では、すべての p_jが $|p_j| < 1$ となる実数解が１０個以上も存在することがわかった[90]。これは大変都合のよい安定な解である。

上に述べた高次分解公式は非線型非平衡系の問題を近似的に解析する際に極めて有効であると期待される。またそれは量子力学、分子動力学、化学反応[81]、天体物理学[80]、加速器物理[77-79]等いろいろな分野で今後大いに役立つことであろう。将来、それは量子カオスの問題にも有効に利用できるものと思われる。

References

[1] C.N. Yang, AAPPS Bulletin, Vol.1, No.3, Dec. 1991, p.3.

[2] M. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn. **61** (1992) 3015.

[3] M. Suzuki, Proceedings of the Int. Conf. on Fractals and Disordered Systems, held on 29-31 July, 1992 in Hamburg (edited by A. Bunde), Physics A (1992).

[4] M. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn. **55** (1986) 4205.

[5] M. Suzuki, M. Katori and X. Hu, J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 3092.

[6] M. Suzuki : in Evolutionary Trends in the Physical Sciences (1991) edited by M. Suzuki and R. Kubo, (Springer Proceedings in Physics **57**, Springer-Verlag), and references therein.

[7] 鈴木増雄,「相転移の超有効場理論とコヒーレント異常法」、物理学最前線 **29** (1992) 55-121.

[8] M. Suzuki, in Quantum Field Theory, ed F. Mancini (Elsevier Science, 1986) p.505.

[9] M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. Suppl. **87** (1986) 1.

[10] M. Suzuki, Phys. Lett. **A116** (1986) 375.

[11] M. Suzuki, J. Stat. Phys. **49** (1987) 977.

[12] M. Katori and M. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn. **25** (1987) 3113.

[13] X. Hu, M. Katori and M. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 3865.

[14] X. Hu and M. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn. **57** (1988) 791.

[15] M. Katori and M. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn. **57** (1988) 807.

[16] M. Katori and M. Suzuki, in Progress in Statistical Mechanics, ed. C.K. Hu (World Scientific, 1988) p.273.

[17] M. Suzuki, in Dynamics of Ordering Processes in Condensed Matter eds. S. Komura and H. Furukawa (Plenum, 1988) p.23.

[18] M. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 4221.

[19] M. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn. **57** (1988) 1.

[20] M. Suzuki, Sci. Form. **3** (1988) 43.

[21] M. Katori and M. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn. **57** (1988) 3753.

[22] J.L. Monroe, Phys. Lett. **A131** (1988) 427.

[23] N. Ito and M. Suzuki, Int. J. Mod. Phys. **B2** (1988) 1.

[24] T. Oguchi and H. Kitatani, J. Phys. Soc. Jpn. **57** (1988) 3973.

[25] T. Oguchi and H. Kitatani, J. Phys. Soc. Jpn. **58** (1989) 3033.

[26] M. Katori, J. Phys. Soc. Jpn. **57** (1988) 4114.

[27] S. Fujiki, in Proc. 2nd. YKIS on Cooperative Dynamics in Complex Physical Systems ed. H. Takayama (Springer, 1988) p.179.

[28] X. Hu and M. Suzuki, Physica **A150** (1988) 310.

[29] M. Suzuki, Phys. Lett. **127A** (1988) 410.

[30] M. Takayasu and H. Takayasu, Phys. Lett. **A128** (1988) 45.

[31] H. Takayasu, M. Takayasu, and T. Nakamura, Phys. Lett **A132** (1988) 429.

[32] X. Hu and M. Suzuki, in Proc. 11th Taniguchi Int. Symposium on Space-Time Organization in Macromolecular Fluids, eds. F. Tanaka, M. Doi and T. Ohta (Springer 1988) p.188.

[33] M. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn. **58** (1989) 3642.

[34] K. Wada and T. Uchida, J. Phys. Soc. Jpn. **58** (1989) 4358.

[35] N. Konno and M. Katori, J. Phys. Soc. Jpn. **59** (1990) 1581.

[36] N. Kawashima, M. Katori, C. Tsallis and M. Suzuki, Int. J. Mod. Phys. **B4** (1990) 1409.

[37] J.L. Monroe, R. Lucente and P. Hourlland, J. Phys. A : Math. Gen. **23** (1990) 2555.

[38] X. Hu and M. Suzuki, J. Phys. A. Math. Gen. **23** (1990) 3501.

[39] S. Fujiki, M. Katori and M. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn. **59** (1990) 2683.

[40] Y. Hirata, Prog. Theor. Phys. **82** (1989) 34.

[41] H. Mano, J. Magn. Magn. Mater. **90-91** (1990) 281.

[42] A. Patrykiejew and P. Borowki, Phys. Rev. **B42** (1990) 4670.

[43] N. Ito and M. Suzuki, Phys. Rev. **B34** (1991) 3483.

[44] K.Minami, Y. Nonomura, M. Katori and M. Suzuki, Physica **A174** (1991) 479.

[45] A. Lipowski, J. Magn. & Magn. Mater. **96** (1991) 267 : Physica **A173** (1991) 293.

[46] M. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn. **57** (1988) 683.

[47] M. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn. **57** (1988) 2310.

[48] M. Suzuki, J. Stat. Phys. **53** (1988) 483.

[49] M. Suzuki, in Proc. 2nd. YKIS on Cooperative Dynamics in Complex Physical Systems ed. H. Takayama. (Springer, 1988) p.9.

[50] M. Suzuki, J. de. Phys. (Paris) Colloque 8 (1988) 1519.

[51] N. Kawashima and M. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn. **58** (1988) 3123.

[52] N. Hatano and M. Suzuki, J. Stat. Phys. **63** (1991) 25 ; ibid **66** (1992) 897.

[53] M. Suzuki and N. Hatano and Y. Nonomura, J. Phys. Soc. Jpn. **60** (1991) 3990.

[54] M. Suzuki, Phys. Lett. **158A**, (1991) 465.

[55] M. Suzuki : in New Trends in Magnetism, edited by M.D. Coutino-Filho and S.M. Rezende (World Scientific, Singapore, 1990).

[56] Y. Nonomura and M. Suzuki, J. Phys. A. ; Math. Gen. **25** (1992) 85 and in press ; J. Phys. Soc. Jpn. **61** (1992) No.11.

[57] T. Horiguchi, K. Tanaka and T. Morita, J. Phys. Soc. Jpn. **59** (1990) 4196. K. Tanaka, T. Horiguchi and T.Morita, J. Phys. Soc. Jpn.**60** (1991) 2576.

[58] K. Wada, N. Watanabe and T. Uchida, J. Phys. Soc. Jpn. **60** (1991) 3289.

[59] M. Suzuki : in Recent Progress in Many-Body Theories, edited by Y. Avishai (Plenum Pub. Co., 1991)

[60] M. Suzuki : in Thermal Field Theories and Their Applications, eds. H. Ezawa, T. Arimitsu and Y. Hashimoto, Elsevier Science Pub. and references cited therein.

[61] A. Lipowski and M. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn. **61** (1992) 2484.

[62] A. Lipowski and M. Suzuki, J. Stat. Phys. **69** (1992) Nos.1/2.

[63] Y. Kinosita, N. Kawashima and M. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn. **61** (1992) No.11.

[64] H. Kobayashi and M. Suzuki, J. Stat. Phys.

[65] H.F. Trotter, Proc. Am. Math. Phys. **10** (1959) 545.

[66] M. Suzuki, Commun. Math. Phys. **51** (1976) 183.

[67] M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **56** (1976) 1454.

[68] M. Suzuki, S. Miyashita and A. Kuroda, Prog. Theor. Phys. **58** (1977) 1377.

[69] M. Suzuki, Phys. Lett. **A113** (1985) 299.

[70] M. Suzuki, J. Math. Phys. **26** (1985) 601.

[71] M. Suzuki, J. Stat. Phys. **43** (1986) 883.

[72] M. Suzuki, Phys.Lett. **A146** (1990) 319.

[73] M. Suzuki, J. Math. Phys. **32** (1991) 400.

[74] M. Suzuki, Phys. Lett. **A165** (1992) 387.

[75] M. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn. **61** (1992) 3015.

[76] 岩波「現代の物理学」"経路積分の方法"を参照。

[77] R.D. Ruth, IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-30 (1983) 2669, and F. Neri, preprint (1988).

[78] E. Forest and R.D. Ruth, Physica **D43** (1990) 105.

[79] E. Forest, J. Math. Phys. **31** (1990) 1133, and preprint.

[80] H. Yoshida, Phys. Lett. **A150** (1990) 262.

[81] A.D. Bandrauk and H. Shen, Chem. Phys. Lett. **176** (1991) 428.

[82] J.A. Oteo and J. Ros, J. Phys. A Math. Gen. **24** (1991) 5751.

[83] P. de Vries, Trottering Through Quantum Physics (Natuurkundig Laboratorium der Universiteit van Amsterdam, Valckenierstraat 65, 1018 XE Amsterdam, (1991))

[84] W. Janke and T. Sauer, Phys. Lett. **A165** (1992) 199.

[85] N. Hatano and M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **85** (1991) 481.

[86] M. Suzuki, in the Proceedings of the International Conference on "Fractals and Disordered Systems" held at Hamburg on July 28-30, 1992, Physica A (in press).

[87] M. Suzuki, in the Proceedings of Statphys 18, Berlin, August 2-8 (1992), Physica A (in press).

[88] R. Kubo, J. Phys. Soc. Jpn. **12** (1957) 570.

[89] R. Kubo, J. Phys. Soc. Jpn. **17** (1962) 1100.

[90] M. Suzuki, to be submitted to J. Math. Phys.